A 35. Hajós György Országos Matematikaverseny feladatai

1. Legyen $f(x) = \ln((1+e^x)^2)$. Számítsa ki az

$$f'(-2012) + f'(-2010) + f'(-2008) + \cdots + f'(0) + \cdots + f'(2010) + f'(2012)$$

kifejezés értékét.

2. Határozza meg az összes olyan $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt, amely minden valós x és y esetén kielégíti az

$$f((x-y)^2) = \left(f(x)\right)^2 - 2xf(y) + y^2$$

függvényegyenletet.

3. Bizonyítsa be, hogy minden n pozitív egész számra

$$1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} < \frac{6n+3}{3n+2}.$$

4. Határozza meg az A paraméter legkisebb értékét, amelyre tetszőleges $x > 0$ esetén teljesül az

$$\ln x \leq A \cdot x^2$$

egyenlőtlenség.

5. Egy AB átmérőjű O középpontú kör kerületén mozgassunk egy P pontot. Mekkora AOP szög esetén lesz az AP átmérőjű körlemeznek az AB átmérőjű körlemez által le nem fedett része maximális?

Minden feladat helyes megoldása 20 pontot ér. Részmegoldást is értékelünk.

Jó munkát kíván a Versenybizottság!

Veszprém, 2013. május 24.

Dr. Csató Sándor Dr. Kárász Péter

Dr. Klincsik Mihály Makó Margit Dr. Molnár-Sáska Katalin

Dr. Obádovics J. Gyula Dr. Szarka Zoltán