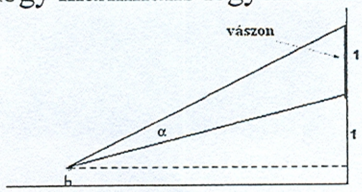
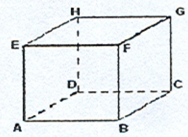
A 32. Hajós György Országos Matematikaverseny feladatai

1. Egy vízszintes terepen levő autós moziban szemünk vízszintesen mért szintjénél 1 egységgel magasabban kezdődik a mozivászon alsó széle, és 1 egységgel fentebb van a vászon felső széle. Milyen messze üljünk a vászontól, hogy maximális legyen az α látószög?



(20 pont)

2. Tekintsük az $ABCDEFGH$ egységnyi élű kockát! Határozza meg a $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{HP}}$ hányados legkisebb és legnagyobb értékét, ha a P pont a kocka olyan élén helyezkedik el, amely nem metszi a BH testátlót!



(20 pont)

3. Oldja meg a következő n-ismeretlenes egyenletet a valós számok körében!

$$\sqrt{x_1 - 1^2} + 2\cdot\sqrt{x_2 - 2^2} + 3\cdot\sqrt{x_3 - 3^2} + \cdots + n\cdot\sqrt{x_n - n^2} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2}$$ (20 pont)

4. Adott az (a_n) valós számsorozat, ahol

$$a_0 = 0;\ a_1 = 1;\ \ 13^{a_n} = 12^{a_{n-1}} + 5^{a_{n-2}},\ \text{ ha } n \ge 2\,.$$

Bizonyítsa be, hogy a sorozat monoton és korlátos! Számítsa ki a sorozat határértékét! (20 pont)

5. A p valós paraméter mely értékeire korlátos az $f(x) = \dfrac{(x-p)^2}{x^2 + x + p^2}$ függvény? Mekkora ezekben az esetekben a függvény minimuma illetve maximuma? Mekkora a maximum legkisebb lehetséges értéke, és a paraméter milyen értéke mellett valósul meg?

(20 pont)

Miskolc, 2010. március 19.

Jó munkát kíván a Versenybizottság:

Dr. Árvai-Homolya Szilvia Dr. Obádovics J. Gyula Dr. Szarka Zoltán Dr. Csató Sándor

Dr. Klincsik Mihály Dr. Molnár-Sáska Katalin Dr. Zoller Vilmos